Documento de Trabajo 96-01
Serie de Economía 01
Enero 1996

Departamento de Economía
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-9849

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL MECANISMO DEL VETO

Emma Moreno y Carlos Hervés*

Resumen

En esta nota se generalizan los conceptos clásicos de núcleo y Equilibrio de Edgeworth de una economía de intercambio. Para ello, se introducen las nociones de S-Núcleo y S-Equilibrio de Edgeworth, donde S es un conjunto de coaliciones permitidas, y se estudian algunas propiedades. Se aporta una caracterización del concepto S-Equilibrio de Edgeworth, mediante la definición de los conceptos equivalentes de S-Núcleo fuzzy y S-Núcleo fuzzy en con coeficientes racionales. Se prueba que, bajo determinadas hipótesis, para conseguir asignaciones del núcleo, de equilibrio walrasiano, equilibrios de Edgeworth o asignaciones del núcleo fuzzy de una economía, no es necesario considerar la formación de todas las coaliciones, sino que es suficiente permitir el veto de un subconjunto de coaliciones S, distinto del total. Estos resultados se obtienen tanto para economías definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita, como para el caso infinito-dimensional.

Palabras clave
Núcleo; Equilibrio de Edgeworth; Núcleo Fuzzy, coaliciones.

*Moreno, Departamento de Economía, Universidad Carlos III de Madrid; Hervés, Universidad de Vigo. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación PS93-0050 de la DGICYT, MInisterio de Educación.

1 Introducción

La formación de coaliciones presenta dificultades teóricas debidas, por ejemplo, a necesidad y coste de información, coste asociado a la propia formación de coaliciones, incompatibilidad entre distintos agentes, que se niegan a cooperar unos con otros, ... Por ello, si suponemos que sólo una parte $\mathcal{S}$ del conjunto de todas las coaliciones posibles de una economía $\mathcal{E}$ son coaliciones permitidas, habremos de interesarnos por las consecuencias que este supuesto tiene a los efectos del mecanismo del veto.

El mecanismo del veto coalicional conduce a los conceptos de núcleo de una economía y, por un proceso límite, al equilibrio de Edgeworth (asignaciones que no están vetadas en ninguna de las réplicas de la economía). Si sólo se permite la participación de determinadas coaliciones en el mecanismo del veto, las coaliciones pertenecientes a un determinado subconjunto $\mathcal{S}$ del cpnjunto de todas las coaliciones posibles, podemos definir los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de una economía $\mathcal{E}$, que generalizan respectivamente las nociones clásicas de núcleo y equilibrio de Edgeworth.

En este trabajo se estudian distintas propiedades de lo que hemos denominado $\mathcal{S}$-Núcleo así como del correspondiente concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth. Hacemos también consideraciones, basadas en las coaliciones permitidas del concepto de núcleo fuzzy, introducido por Aubin (1979), para extender resultados de Florenzano (1990) y Hüsseinov (1994), al mismo tiempo que obtenemos nuevas caracterizaciones del núcleo y del equilibrio de Edgeworth.

En el caso de economías continuas, economías sin átomos, el tamaño de una coalición puede significar el coste de formación de ésta o, alternativamente, puede ser conveniente considerar coaliciones de un tamaño dado. Si, por ejemplo, $\mathcal{S}$ denota el conjunto de coaliciones de tamaño menor que ε, el $\mathcal{S}$-Núcleo coincide con el núcleo de la economía como consecuencia del resultado de Schmeidler (1972). También podemos traducir los resultados de Grodal (1972) y Vind (1972) en términos de $\mathcal{S}$-Núcleos. Así, podemos concluir que en economías sin átomos es suficiente considerar el veto de coaliciones arbitrariamente pequeñas o arbitrariamente grandes. Más aún, basta considerar la formación de coaliciones de cualquier tamaño dado.

Por tanto, los precios de equilibrio competitivo pueden considerarse como aquellos que no pueden ser manipulados por grupos de agentes arbitrariamente pequeños. Para ello es esencial que el espacio de mercancías sea de dimensión finita (el teorema de Liapunov no es válido en el caso infinito-dimensional).

Evidentemente estos resultados tienen una clara conexión con el supuesto de que los agentes adoptan un comportamiento precio-aceptante.

Ostroy y Zame (1994) ponen de manifiesto que, en general, el problema de la competencia perfecta no se resuelve al considerar un continuo de agentes, pues, aún siendo así, depende de lo ellos denominan "espesura" o "grosor" de la economía. Sin embargo, si el espacio de mercancías es $\mathbb{R}^{\ell}$, y el conjunto de agentes un espacio de medida sin átomos (para que el teorema de Liapunov pueda ser utilizado), el veto de coaliciones pequeñas elimina los estados que no son perfectamente competitivos. Cabe preguntarse si un resultado análogo se mantiene en cualquier economía perfectamente competitiva (economías "espesas", física o económicamente), y también si este es un test que caracteriza a dichas economías. Es decir, si el resultado no es cierto en economías continuas que no son "espesas" (thin market economies).

El resto de esta nota se desarrolla como sigue. En la sección 2 se define el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo en un marco general y se deducen algunas propiedades. La sección 3 contiene resultados conocidos interpretados en términos de $\mathcal{S}$-Núcleos. En la sección 4, siguiendo García-Cutrín y Hervés (1994), se establece un planteamiento discreto de una economía continua de n tipos, lo cual nos va a permitir interpretar cuales son las coaliciones suficiente para vetar los estados no competitivos en economías de n agentes. En la sección 5 se introducen los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $r\mathcal{S}$-Núcleo en economías réplicas, estableciendo, como interpretación de un resultado clásico (Hansen(1969)),que para conseguir las asignaciones walrasianas de una economía basta considerar el veto de $nr+1$ coaliciones en cada réplica. En la sección 6 se definen las nociones de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy y $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy en con coeficientes racionales. Se prueba que las dos últimas nociones son equivalentes. Se obtiene, tanto en el caso finito como infinito-dimensional una caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de una economía mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy correspondiente. Este resultado generaliza el de la conocida equivalencia entre Equilibrio de Edgeworth y Núcleo fuzzy. permitiendo caracterizar el concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth sin recurrir a las economías réplicas. Además se prueba que es suficiente el veto ponderado de la coalición formada por todos los agentes para conseguir las asignaciones pertenecientes al núcleo fuzzy o los equilibrios de Edgeworth de una economía. En la sección 7 se obtienen resultados que relacionan el $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía finita con el $\mathcal{S}_c$-Núcleo de una economía continua. Se obtiene también la equivalencia entre las asignaciones de equilibrio de walrasiano y el núcleo fuzzy, tanto para el caso en que el espacio de mercancías es de dimensión finita como para el caso de dimensión infinita. Estos resultados generalizan otros de Hüsseinov (1994), que suponen convexidad, monotonía y continuidad, y además el espacio de mercancías es finito-dimensional. Por último, la sección 8 contiene comentarios y observaciones finales.

2 $\mathcal{S}$-Núcleos: Definición y propiedades

Sea la economía de intercambio $\mathcal{E} = ((I, \mathcal{A}, \mu), \omega(t), \preceq_t, t \in I)$ definida sobre el espacio de mercancías E. $(I, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, donde I es el conjunto de agentes y μ una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$. Cada agente $t \in I$

viene caracterizado por su dotación inicial $\omega(t) \in E_+$ y su relación de preferencias $\preceq_t$ sobre su conjunto de consumo E_+. Una coalición es un conjunto medible $S \subset I$ tal que $\mu(S) > 0$. Dado $S \in \mathcal{A}$, $\mu(S)$ representa el tamaño de la coalición S.

Un estado de la economía es una aplicación $f : I \rightarrow E_+$ μ-integrable. Un estado f es admisible si $\int_I f d\mu \leq \int_I \omega d\mu$.

Se dice que la coalición S veta a f via g si se verifica lo siguiente

i. $\int_S g d\mu \leq \int_S \omega d\mu$

ii. $g(t) \succ_t f(t)$ para casi todo $t \in S$.

Un estado admisible f pertenece al núcleo de la economía si no está vetado por una coalición $S \in \mathcal{A}$. Denotamos por $N(\mathcal{E})$ el conjunto de los estados del núcleo de la economía $\mathcal{E}$.

Observación. Nótese que en el caso en que el conjunto de agentes es finito, $I = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A}$ es el conjunto de las partes de I, $\mathcal{P}(I)$ y μ es la medida de contar, y por tanto, $\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i$, y el tamaño de una coalición $S \in \mathcal{P}(I)$ viene dado por el cardinal del conjunto S, esto es, $\mu(S) = card(S)$. Si nos referimos a una economía sin átomos, el espacio de medida $(I, \mathcal{A}, \mu)$ sería un espacio sin átomos, por ejemplo, $I = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ los subconjuntos medibles de I y μ la medida de Lebesgue. Podemos también considerar economías mixtas, en cuyo caso $I = [0, 1] \bigcup \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{A}$ es el conjunto formado por los subconjuntos medibles del intervalo real $[0, 1]$ y por el conjunto de las partes de $\{1, \ldots, n\}$, y μ es la medida producto.

Puede ocurrir que algunos grupos de agentes tengan dificultades para constituir una coalición (por ejemplo altos costes, falta de comunicación, incompatibilidad de los agentes, ...) y pactar una redistribución de sus recursos. Teniendo esto en cuenta, podemos considerar que no siempre es posible la formación de todas las coaliciones en una economía sino que sólo algunas pueden realmente formarse. Esta idea conduce a introducir el concepto que denominamos $\mathcal{S}$-Núcleo, siendo $\mathcal{S}$ un conjunto que ha sido seleccionado del conjunto total de coaliciones. Nos referiremos a $\mathcal{S}$ como conjunto de coaliciones permitidas. Así, un estado admisible pertenece al $\mathcal{S}$-Núcleo de la economía $\mathcal{E}$ si no está vetado por una de las coaliciones permitidas.

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, con $\mu(S) > 0$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Decimos que un estado admisible f de la economía $\mathcal{E}$ es un elemento del $\mathcal{S}$-Núcleo de $\mathcal{E}$, y denotamos $f \in \mathcal{S}$-$N(\mathcal{E})$si no está vetado por una coalición $S \in \mathcal{S}$.*

Nótese que el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo generaliza la noción de núcleo de una economía. Basta tomar $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ para obtener la definición de núcleo que se acostumbra a leer en la literatura económica.

De la definición establecida se deducen fácilmente las siguientes propiedades del $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía de intercambio:

(P.1) Sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$. Entonces $\mathcal{S}_2$-$N(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}_1$-$N(\mathcal{E})$. En particular, $N(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$-$N(\mathcal{E})$cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

(P.2) $\mathcal{S}_1$-$N(\mathcal{E}) \cap \mathcal{S}_2$-$N(\mathcal{E}) = (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$-$N(\mathcal{E})$, cualesquiera que sean $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{A}$.

De la propiedad (P.1) se deduce que las condiciones que garantizan la existencia de núcleo de una economía son suficientes para garantizar la existencia de $\mathcal{S}$-Núcleo, cualquiera que sea el conjunto $\mathcal{S}$ de coaliciones permitidas. De (P.2) se deduce que si $\mathcal{A} = \bigcup_i \mathcal{S}_i$, entonces $\bigcap_i(\mathcal{S}_i$-$N(\mathcal{E})\ ) = N(\mathcal{E})$.

3 Equivalencia entre Núcleo y $\mathcal{S}$-Núcleo en una economía sin átomos

Teniendo en cuenta las dificultades que pueden presentarse en la formación de algunas coaliciones, sería de interés establecer condiciones sobre $\mathcal{S} \neq \mathcal{A}$, y sobre la economía $\mathcal{E}$ que garanticen la equivalencia $\mathcal{S}$-$N(\mathcal{E})$=$N(\mathcal{E})$. Sería también de interés analizar si resultados que hacen referencia al núcleo de una economía, por ejemplo la equivalencia Core-Walras, siguen siendo ciertos si se restringe el conjunto de coaliciones permitidas. A continuación se establecen ejemplos que hacen referencia a este tipo de cuestiones.

Consideremos una economía sin átomos $\mathcal{E} = ((I, \mathcal{A}, \mu), \omega(t), \preceq_t, t \in I)$ definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$. Es decir, el espacio $(I, \mathcal{A}, \mu)$, que representa el conjunto de agentes, es un espacio de medida sin átomos. Por ejemplo, I es el intervalo real $[0,1]$, $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra formada por los subconjuntos μ-medibles de I, y μ la medida de Lebesgue.

Los siguientes teoremas son consecuencia de los elegantes resultados de Schmeidler (1972), Grodal (1972) y Vind (1972).

Teorema 3.1 *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se verifica $\mathcal{S}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$, siendo $\mathcal{S}_\varepsilon$ el conjunto de coaliciones $S \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(S) = \varepsilon$.*

Demostración. Véase Schmeidler.

El resultado de Grodal (1972) permite restringir aún más el conjunto de coaliciones permitidas, manteniendo la equivalencia anterior.

Teorema 3.2 *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ se verifica $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$, siendo $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$ el conjunto de coaliciones $S \in \mathcal{A}$ tales que $S = \bigcup_{i=1}^{\ell+1} S_i$, con $\mu(S_i) \leq \varepsilon$ y $\mu(S) = \varepsilon$. Además si las preferencias son débilmente monótonas $\ell + 1$ puede sustituirse por ℓ.*

Suponiendo hipótesis habituales sobre las preferencias y utilizando lo establecido por Grodal. se deduce de Vind (1972) un resultado de equivalencia más general.

Teorema 3.3 *Supongamos que para casi todo* $t \in I$ *las preferencias* $\succ_t$ *son contínuas, monótonas, y medibles en el sentido que el conjunto* $\{t \in I | x \succ_t y\} \in \mathcal{A}$, *cualesquiera que sean* $x, y \in \mathbb{R}^\ell_+$. *Entonces para cada* ε, *tal que* $0 < \varepsilon < 1$, *se verifica* $\hat{\mathcal{S}}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = \mathcal{S}^*_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_\varepsilon$-$N(\mathcal{E}) = N(\mathcal{E})$, *siendo* $\mathcal{S}^*_\varepsilon$ *el conjunto de coaliciones* $S \in \mathcal{A}$ *tales que* $S = \cup_{i=1}^\ell S_i$, *con* $\mu(S_i) \leq \varepsilon$ *y* $\mu(S) = \varepsilon$

Podemos, por tanto, concluir que las asignaciones del núcleo de una economía sin átomos vienen caracterizadas por aquellas asignaciones que no están vetadas por coaliciones arbitrariamente pequeñas(teorema 3.1). Más aún, si consideramos que agentes cercanos tienen características parecidas, entendiendo por ello que podemos englobarlos dentro de un mismo tipo, entonces, basta considerar coaliciones arbitrariamente pequeñas formadas por ℓ tipos de agentes, siendo ℓ el número de los diferentes bienes que se intercambian en la economía (teorema 3.2). Por último, del teorema 3.3 se deduce que para conseguir la optimalidad de Pareto y la equivalencia Core-Walras es suficiente el veto de coaliciones constituidas por agentes de, a lo sumo, ℓ tipos y de medida $\bar{\varepsilon}$, con $0 < \bar{\varepsilon} < 1$. En particular, basta tener en cuenta la formación de coaliciones de medida tan pequeña o tan grande como se quiera.

4 Planteamiento discreto de una economía sin átomos.

Consideremos una economía de intercambio puro $\mathcal{E}_c$ con un continuo de agentes, representados por el intervalo real $I = [0, 1]$, y definida sobre el espacio de mercancías $X = \mathbb{R}^\ell$. En la economía $\mathcal{E}_c$ sólo se distingue un número finito n de agentes distintos. Así, el conjunto de agentes I está dividido en n subintervalos disjuntos. cada uno de los cuales representa un tipo de agente. Esto es, $I = \cup_{i=1}^n I_i$. donde $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$, si $i \neq n$, $I_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$. Cada consumidor $t \in I$ se caracteriza por su conjunto de consumo $\mathbb{R}^\ell_+$, sus recursos iniciales $\omega(t) = \omega_i$ para cada $t \in I_i$, y su relación de preferencias $\succeq_t = \succeq_i$ para todo $t \in I_i$, siendo I_i el conjunto de agentes de tipo i. Una asignación $f : I \to \mathbb{R}^\ell_+$ se dice factible si $\int_I f d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)\omega_i$, donde μ denota la medida de Lebesgue sobre los subconjuntos medibles de $[0, 1]$.

Siguiendo García-Cutrín y Hervés (1993), podemos interpretar esta economía continua $\mathcal{E}_c$ como una economía con n agentes donde el agente i representa infinitos agente idénticos. También podemos interpretar $\mathcal{E}_c$ como una economía con n agentes no homogéneos, donde la influencia relativa del agente i viene dada por la medida $\mu(I_i)$ del subintervalo I_i que representa el tipo i. Para ello, asociamos a la economía $\mathcal{E}_c$ una economía discreta $\mathcal{E}_n$ con n agentes, donde cada agente $i \in I_n = \{1, \ldots, n\}$ viene caracterizado por su conjunto de consumo $\mathbb{R}^\ell_+$, sus dotaciones iniciales ω_i y su relación de preferencias $\succeq_i$. De este modo, una asignación f en $\mathcal{E}_c$ puede interpretarse como una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$, donde $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Recíprocamente, una asignación x en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación f en $\mathcal{E}_c$, donde f es la función escalonada definida por $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.

Para cada r entero positivo, definimos la r-réplica de la economía $\mathcal{E}_n$, que denotamos por $r\mathcal{E}_n$, como una nueva economía con rn agentes indiciados por ij, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, tal que cada consumidor ij viene caracterizado por recursos $\omega_{ij} = \omega_i$ y preferencias $\succeq_{ij} = \succeq_i$. Cada asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{E}_n$ puede interpretarse como una asignación $rx = (x_{11}, \ldots, x_{1r}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nr})$ para cada economía réplica $r\mathcal{E}_n$, siendo $x_{ij} = x_i$, para todo $j = 1, \ldots, r$ y para todo $i = 1, \ldots, n$. Tales asignaciones se denominan asignaciones de igual tratamiento en $r\mathcal{E}_n$.

Un equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $(x_1, \ldots, x_n)$ que pertenece al núcleo de cualquier réplica. Denotemos por $E(\mathcal{E}_n)$ el conjunto de asignaciones de equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$. Esto es, $E(\mathcal{E}_n) = \bigcap_{r \geq 1} N(r\mathcal{E}_n)$.

Para cada número real ε, con $0 < \varepsilon < 1$, sea $\mathcal{S}_\varepsilon^c$ el conjunto de coaliciones $S \subset [0, 1]$ tales que $\mu(S) = \varepsilon$ y $card\{i \in \{1, \ldots, n\} | \mu(I_i \cap S) > 0\} = \ell$, si $n > \ell$. Como consecuencia de los resultados en García-Cutrín y Hervés (1993) y de los resultados señalados en la sección anterior obtenemos la siguiente equivalencia.

Teorema 4.1 *Supongamos que las preferencias $\succ_i$ son contínuas, convexas y monótonas. Entonces, sea cual sea ε, con $0 < \varepsilon < 1$, se verifica que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a $E(\mathcal{E}_n)$ si y sólo si f pertenece a $\mathcal{S}_\varepsilon^c$-$N(\mathcal{E}_c)$, siendo $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.*

Por tanto, se tiene que para conseguir los equilibrios de Edgeworth para una economía $\mathcal{E}_n$ con un número finito de agentes, no es necesario el veto de cualquier coalición en la economía contínua de n tipos $\mathcal{E}_c$, sino que es suficiente el veto de coaliciones de medida $\bar{\varepsilon}$. En particular, es suficiente el veto de coaliciones arbitrariamente pequeñas o arbitrariamente grandes. Además, si el número de agentes en $\mathcal{E}_n$ es mayor que el número de bienes ℓ, entonces basta considerar el veto de coaliciones formadas por ℓ tipos de agentes. Del mismo modo, para conseguir la equivalencia Core-Walras en $\mathcal{E}_c$ es suficiente considerar el veto de las coaliciones en $\mathcal{S}_\varepsilon^c$. Así, los precios de equilibrio competitivo vienen caracterizados como aquellos que no pueden ser manipulados por "pequeños" grupos de agentes, lo cual es una justifición más del supuesto de competencia perfecta en economías continuas $\mathcal{E}_c$.

5 $\mathcal{S}$-Núcleos en economías réplicas.

Nuestro objetivo ahora es introducir la noción de $\mathcal{S}$-Núcleos, o núcleos donde sólo se considere el veto de algunas coaliciones, en economías réplicas y ver cómo se relaciona con los conceptos clásicos ya citados. Para ello, establecemos la siguiente notación. Sea $\mathcal{P}(I_n)$ es conjunto formado por los subconjuntos no vacíos de I_n, es decir, el conjunto formado por todas las coaliciones en la economía de n agentes $\mathcal{E}_n$. Denotemos por rI_n el conjunto de agentes en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$. Dada una coalición S en $\mathcal{E}_n$, denotamos por $r(S)$ el conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ formadas por r_i agentes de tipo i, con $0 < r_i \leq r$ si $i \in S$ y $r_i = 0$ si $i \notin S$. Asociemos a cada un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ en $\mathcal{E}_n$, el conjunto de coaliciones $r(\mathcal{S})$ en $r\mathcal{E}_n$ definido por $r(\mathcal{S}) = \cup_{S \in \mathcal{S}} r(S)$. Esto es, $r(\mathcal{S})$ es el siguiente conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$

$$r(\mathcal{S}) = \left\{ S^r \subset rI_n | \text{ existen } S \in \mathcal{S} \text{ y } J \subset \{1, \ldots, r\} \text{ tal que } S^r = \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in J}} \{ij\} \right\}$$

Definición 5.1 *Decimos que una asignación factible x en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ es un elemento del $\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$, y denotamos $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, si no está vetada por una coalición perteneciente a $r(\mathcal{S})$.*

Nótese que si $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, entonces para cada ij, ij' se verifica que $x_{ij} \sim x_{ij'}$ si las preferencias son convexas, y $x_{ij} = x_{ij'}$ si las preferencias son estrictamente convexas. Nótese también que si $I_n \in \mathcal{S}$, entonces $r(\mathcal{S})$ es el conjunto de todas las coaliciones en $r\mathcal{E}_n$. Para restringir más las coaliciones permitidas en las economías réplicas establecemos una selección arbitraria en $r(\mathcal{S})$. Es decir, dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ en $\mathcal{E}_n$, consideremos para cada r un conjunto de coaliciones no vacío $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$. Esto conduce a un concepto más general que el anterior.

Definición 5.2 *Sea una sucesión $(r\mathcal{S})$ de coaliciones permitidas en las economías réplicas $r\mathcal{E}_n$, tal que $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Decimos que una asignación factible x en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ es un elemento del $r\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$, y denotamos $x \in r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, si no está vetada por una coalición perteneciente a $r\mathcal{S}$.*

Observaciones. Obsérvese que si la selección elegida verifica $(r+1)\mathcal{S} \subset r\mathcal{S}$, entonces $(r+1)\mathcal{S}\text{-}N((r+1)\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$. Obsérvese también que para cada r entero positivo se verifica $N(r\mathcal{E}_n) \subset r(\mathcal{S})\text{-}N(r\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, sea cual sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$ y sea cual sea la selección $(r\mathcal{S})$. Por otra parte, tanto en la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$ como en la noción de $r\mathcal{S}$-Núcleo de $r\mathcal{E}_n$, la sucesión de coaliciones permitidas en las economías réplicas verifica lo siguiente. Si un agente de tipo i no formó coalición con un agente de tipo i' en la economía $\mathcal{E}_n$, entonces un agente ij no formará coalición con un agente $i'j'$ en la economía $r\mathcal{E}_n$, cualquiera que sea r. Por el contrario, si agentes de tipos i, i' diferentes forman parte de una coalición permitida en $\mathcal{E}_n$, entonces en cualquier economí réplica $r\mathcal{E}_n$ se permitirán las coaliciones que incluyan al menos un agente representativo de tales tipos.

Es sabida la equivalencia entre el equilibrio de Edgeworth y las asignaciones de equilibrio walrasiano en una economía con preferencias ordenadas y definida sobre un espacio de mercancías de dimensión finita (Debreu y Scarf (1963)). Esto es, las asignaciones walrasianas de una economía son elementos del núcleo (versión fuerte del primer teorema del bienestar), y "en el límite" sólo las asignaciones walrasianas pertenecen al núcleo. Se formaliza así la idea de Edgeworth de que cuantos más agentes intervengan en la economía más cerca está el núcleo de los estados de equilibrio walrasiano.

En la sección anterior hemos establecido que para conseguir los equilibrios de Edgeworth de una economía discreta $\mathcal{E}_n$ no es necesario considerar el veto de todas las coaliciones en la economía contínua $\mathcal{E}_c$ de n tipos. En Hansen (1969) se prueba un resultado que nos permite concluir que para conseguir las asignaciones de equilibrio walrasiano de $\mathcal{E}_n$ podemos restringir el conjunto de coaliciones permitidas en las economías réplicas a aquellas coaliciones formadas por todos los agentes de un tipo y todos menos uno de los demás junto con la coalición de todos los agentes. Es decir, basta considerar el veto de $nr + 1$ coaliciones en cada economía $r\mathcal{E}_n$.

Teorema 5.1 *Supongamos que en la economía $\mathcal{E}_n$ se verifica que para todo agente $i \in \{1, \dots, n\}$ las preferencias son monótonas, estrictamente convexas, $\omega_i \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$, y el conjunto $\{x' | x' \succeq_i x\}$ tiene un único hiperplano soporte en x, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Entonces se tiene lo siguiente. El conjunto de asignaciones walrasianas de $\mathcal{E}_n$ pertenecientes a $\mathbb{R}^{n\ell}_{++}$ coincide con $\bigcap_{r \geq 1} r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, siendo $r\mathcal{S} = \left\{ S^r \in rI_n | S^r = \left(\bigcup_{j=1}^{r} \{kj\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{r-1} \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \{ij\} \right) \right\} \cup rI_n$.*

Por tanto, si $x \in \mathbb{R}^{n\ell}_{++}$ es una asignación eficiente en el sentido de Pareto y $x \in r\mathcal{S}'\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$ para todo r entero positivo, con $r\mathcal{S}' = r\mathcal{S} \setminus rI_n$, entonces existe un sistema de precios que descentraliza x, es decir, esxiste $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ tal que (p, x) es equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}_n$. Así, bajo las hipótesis de este teorema y teniendo en cuenta el resultado de Debreu y Scarf (1963), podemos concluir que $E(\mathcal{E}_n) = \bigcap_{r \geq 1} r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$. Esto es, es suficiente considerar el veto de las coaliciones en $r\mathcal{S}$. en las economías réplicas $r\mathcal{E}_n$, para conseguir los equilibrios de Edgeworth en $\mathcal{E}_n$ que pertenecen a $\mathbb{R}^{n\ell}_{++}$.

6 Definición y caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth: $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy

La misma idea de restringir el conjunto de coaliciones permitidas, conduce a introducir la noción de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, generalizando el concepto de Equilibrio de Edgeworth. Para ello, consideramos la economía de n agentes $\mathcal{E}_n$ y un subconjunto $\mathcal{S}$ del conjunto total de coaliciones. Para cada r entero positivo, sea $r(\mathcal{S})$ el conjunto de coaliciones en la economía réplica $r\mathcal{E}_n$ definido en la sección anterior.

Definición 6.1 *Un $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $x \in \mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$, para todo $r \in \mathbb{N}$.*

Para poder restringir más el conjunto de coaliciones permitidas, introducimos el concepto de equilibrio de Edgeworth asociado a una selección $(r\mathcal{S})$ de $(r(\mathcal{S}))$.

Definición 6.2 *Sea una sucesión $(r\mathcal{S})$ de coaliciones permitidas en las economías réplicas $r\mathcal{E}_n$, tal que $r\mathcal{S} \subset r(\mathcal{S})$ para cada $r \in \mathbb{N}$. Decimos entonces que un $r\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth para la economía $\mathcal{E}_n$ es una asignación factible $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $x \in r\mathcal{S}\text{-}N(r\mathcal{E}_n)$para todo $r \in \mathbb{N}$.*

Denotemos por $\mathcal{S}\text{-}E(\mathcal{E}_n)$el conjunto de los $\mathcal{S}$-Equilibrios de Edgeworth y por $r\mathcal{S}\text{-}E(\mathcal{E}_n)$el conjunto de los $r\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth de la economía $\mathcal{E}_n$. Nótese que $E(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}\text{-}E(\mathcal{E}_n) \subset r\mathcal{S}\text{-}E(\mathcal{E}_n)$, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones permitidas $\mathcal{S}$ y cualquiera que sea la selección $(r\mathcal{S})$.

Aubin (1979) introduce el concepto de Núcleo fuzzy, formalizando la idea de aumentar el conjunto de coaliciones permitiendo que los agentes puedan fraccionarse. en el sentido de contribuir con parte de sus recursos. Si se considera que los agentes pueden participar con una fración de sus recursos y si las preferencias son convexas, entonces un equilibrio de Edgeworth puede definirse como una asignación factible que no es vetada por una coalición con un ratio racional de participación.

Decimos que una asignación factible x pertenece al Núcleo fuzzy de $\mathcal{E}_n$, y denotamos $x \in NF(\mathcal{E}_n)$, si x no está f-vetada.

Una asignación x está f-vetada (f-vetada en $\mathbb{Q}$) por la coalición S vía y si existen $\alpha_s \in [0, 1], \alpha_s \neq 0$ ($\alpha_s \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \alpha_s \neq 0$), para cada $s \in S$, tales que

i. $\sum_{s \in S} \alpha_s y_s = \sum_{s \in S} \alpha_s \omega_s$.

ii. $y_s \succ_s x_s$ para todo $s \in S$.

Considerando una vez más un subconjunto $\mathcal{S}$ del conjunto total de coaliciones, introducimos el concepto de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy, que generaliza la noción de Núcleo fuzzy.

Definición 6.3 *Se dice que la asignación x está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada si está f-vetada por alguna coalición $S \in \mathcal{S}$. Las asignaciones que no están $\mathcal{S}$-fuzzy vetadas constituyen el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy, que denotamos por $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$.*

Nótese que cualquiera que sea el conjuto de coaliciones $\mathcal{S}$ verifica que $NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$N(\mathcal{E}_n)$. Además, propiedades análogas a las citadas para $\mathcal{S}$-Núcleos se obtienen para $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy. La definición de núcleo fuzzy establecida anteriormente equivale a la introducida por Aubin (1979). Sin embargo, exigimos que los α_i sean estrictamente positivos para todo agente en la coalición, para que la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy sea más interesante.

Definición 6.4 *Se dice que la asignación x está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada en $\mathbb{Q}$si está f-vetada en $\mathbb{Q}$por alguna coalición $S \in \mathcal{S}$. Las asignaciones que no están $\mathcal{S}$-fuzzy vetadas en $\mathbb{Q}$constituyen el $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$–Núcleo fuzzy, que denotamos por $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF($\mathcal{E}_n$).*

A continuación se prueba que el veto con participaciones reales es equivalente al veto con participaciones racionales. Se deduce entonces que el conjunto de asignaciones de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth coincide con el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy. Esta equivalencia permite concluir que no es necesario recurrir a economías réplicas para dar una caracterización del $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth.

Teorema 6.1 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con n agentes definida sobre el espacio de mercancías de dimensión finita $\mathbb{R}^\ell$. Entonces $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-$NF(\mathcal{E}_n)$, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$.*

Demostración. Es obvio que $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF($\mathcal{E}_n$). Para probar el recíproco, supongamos que la asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada. Entonces, existe $S \in \mathcal{S}$, y existen $y_i \in \mathbb{R}^\ell_+$ y $\alpha_i \in (0,1]$, para cada $i \in S$, tales que $\sum_{i \in S} \alpha_i y_i = \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$ para todo $i \in S$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\alpha_i \leq \frac{1}{n}$ para todo $i \in S$. Sea $S_c \subset [0,1]$ una coalición en la economía contínua $\mathcal{E}_c$, tal que $\mu(S_c \cap I_i) = \alpha_i$. Sea $y(t) = y_i$ si $t \in S_c \cap I_i$ y sea $f(t) = x_i$ si $t \in I_i$. Se tiene entonces que la asignación f en $\mathcal{E}_c$ está vetada por la coalición S_c vía y. Siguiendo Schmeidler (1972), definamos la medida vectorial sin átomos λ sobre $\mathcal{A}$, restringida a S_c, como sigue. $\lambda(A) = (\int_A (y - \omega) d\mu, \mu(A))$, para cada $A \in \mathcal{A}$, $A \subset S_c$. Sea $\varepsilon \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$, tal que $\alpha - \min_{i \in S} \alpha_i < \varepsilon < \alpha$, siendo $\alpha = \sum_{i \in S} \alpha_i$. Por el teorema de Liapunov, existe $S'_c \subset S_c$, tal que $\mu(S'_c) = \varepsilon$ y S'_c veta f vía la misma asignación y en $\mathcal{E}_c$. Además si $\alpha_i > 0$, entonces $\mu(S'_c \cap I_i) = \alpha'_i > 0$ y $\alpha_i \in \mathbb{Q}$. Por tanto x está f-vetada en $\mathbb{Q}$por la coalición S.

Sin establecer hipótesis se ha obtenido que si una coalición S veta una asignación x con participaciones reales vía y, entonces también veta x con participaciones racionales vía la misma asignación y. La prueba del resultado no es válida si el espacio de mercancías es de dimensión infinita, pues en ese caso no se verifica el teorema de Liapunov. Sin embargo, si suponemos continuidad de las preferencias, podemos establecer una prueba alternativa, que es válida en dimensión infinita.

Teorema 6.2 *Sea $\mathcal{E}$ una economía definida sobre el espacio de mercancías E. Supongamos que E es un e.v.t. y que los n agentes que forman la economía tienen preferencias continuas sobre su conjunto de consumo E_+. Entonces $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}) = \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-$NF(\mathcal{E})$, cualquiera que sea el conjunto de coaliciones $\mathcal{S}$.*

Demostración. Obviamente se verifica que $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF$(\mathcal{E}_n)$. Para probar el recíproco, supongamos que la asignación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ está $\mathcal{S}$-fuzzy vetada. Entonces, existe $S \in \mathcal{S}$, y existen $y_i \in E_+$ y $\alpha_i \in (0,1]$, para cada $i \in S$, tales que $\sum_{i \in S} \alpha_i y_i = \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$ para todo $i \in S$. Sea $\alpha_i^k = E[k\alpha_i + 1]$, donde $E[t]$ denota la parte entera del número real t. Sea $y_i^k = \frac{k\alpha_i}{\alpha_i^k}(y_i - \omega_i) + \omega_i \in \mathbb{R}_+^\ell$. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{k\alpha_i}{\alpha_i^k} = 1$, obtenemos que: $\lim_{k\to\infty} y_i^k = y_i$. Luego, por continuidad de las preferencias, existe k_0 tal que $k \geq k_0 \Rightarrow y_i^k \succ_i y_i$ para todo $i \in S$. Además, se verifica que $\sum_{i \in S} \alpha_i^k y_i^k = \sum_{i \in S} k\alpha_i(y_i - \omega_i) + \alpha_i^k \omega_i = k(\sum_{i \in S} \alpha_i y_i - \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i) + \sum_{i \in S} \alpha_i^k \omega_i = \sum_{i \in S} \alpha_i^k \omega_i$, donde α_i^k son enteros para todo $i \in S$. Se deduce, por tanto, que x está f-vetada en $\mathbb{Q}$ por la coalición $S \in \mathcal{S}$. En consecuencia $x \notin \mathcal{S}_{\mathbb{Q}}$-NF$(\mathcal{E}_n)$.

Corolario 6.1 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con n agentes definida sobre el espacio de mercancías de dimensión finita $\mathbb{R}_+^\ell$, y sea $\mathcal{E}$ una economía en las condiciones del teorema 6.2. Para cada conjunto arbitrario de coaliciones $\mathcal{S}$ se verifica lo siguiente. Existe una selección $r\mathcal{S}$ de $r(\mathcal{S})$ tal que, si x pertenece a $r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$(resp. $x \in r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$), entonces x pertenece a $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$ (resp. $x \in \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$). Si además las preferencias son convexas se verifica que si una asignación x pertenece a $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$ (resp. a $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$), entonces x pertenece a $r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$(resp. a $r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E})$). En particular, $\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$=$\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$ y $\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}) = \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E})$.*

Demostración. Supongamos que la asignación x está f-vetada por una coalición $S \in \mathcal{S}$. Entonces, por el teorema 6.1 (teorema 6.2) existen $a_i \in \mathbb{N}$ (resp. existen $\alpha_i^k \in \mathbb{N}$), para cada $i \in S$, tales que la coalición formada por a_i (resp. por α_i^k) agentes de tipo i veta a $(x_1, \ldots, x_1; \ldots; x_n, \ldots, x_n)$ en la economía $r\mathcal{E}_n$ (resp. en la economía $k\mathcal{E}$), con $r \geq \max_{i \in S}\{a_i\}$ (resp. con $k \geq k_0$). Recíprocamente, la convexidad de las preferencias nos permite afirmar que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin r\mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$, entonces existe $S \in \mathcal{S}$ y existen r_i, y_i, para cada $i \in S$, tales que $\sum_{i \in S} r_i y_i = \sum_{i \in S} r_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S$. Luego, $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$E(\mathcal{E}_n)$. Lo mismo sucede en el caso de dimensión infinita.

Este resultado generaliza la equivalencia entre los Equilibrios de Edgeworth y el Núcleo fuzzy, tanto en el caso finito como infinito-dimensional. Como hemos señalado anteriormente, ello permite concluir que no es necesario recurrir a las réplicas de una economía para dar una caracterización de los $\mathcal{S}$-Equilibrios de

Edgeworth, pues equivalen al $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy correspondiente. Esta conclusión es importante, dado que en ocasiones hay dificultades para definir economías réplicas, como sucede, por ejemplo, en el caso de preferencias interdependintes.

En la sección 3 hemos obtenido resultados de equivalencia entre núcleo y $\mathcal{S}$-Núcleo de economías sin átomos, para determinados conjuntos de coaliciones $\mathcal{S}$, distintos del total. Estos resultados, junto con la interpretación discreta de una economía continua de n tipos, nos permite establecer la siguiente equicalencia entre núcleo fuzzy y $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy de una economía $\mathcal{E}_n$ con un núnero finito n de agentes.

Teorema 6.3 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con n agentes y definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$. Supongamos que las preferencias de los agentes son continuas, monótonas y convexas. Entonces $NF(\mathcal{E}_n) = \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$, cualquiera que sea $\mathcal{S}$ tal que $I_n \in \mathcal{S}$, siendo I_n el conjunto de agentes en la economía $\mathcal{E}_n$.*

Demostración. Obviamente $NF(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$, cualquiera de sea $\mathcal{S}$. Supongamos que $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin NF(\mathcal{E}_n)$. Entonces existe una coalición $S \subset I_n$ que f-veta x vía $(y_i)_{i \in S}$. Esto es, para cada $i \in S$ existen α_i, con $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{n}$, tales que $\sum_{i \in S} \alpha_i y_i = \sum_{i \in S} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S$. Sea $S_c \subset [0,1]$ una coalición en la economía contínua $\mathcal{E}_c$, tal que $\mu(S_c \cap I_i) = \alpha_i$. Sea $y(t) = y_i$ si $t \in S_c \cap I_i$ y sea $f(t) = x_i$ si $t \in I_i$. Se tiene entonces que la asignación f en $\mathcal{E}_c$ está vetada por la coalición S_c vía y. Por el resultado en Vind (1972) existe $S'_c \subset [0.1]$, con $\mu(S'_c) > \frac{n-1}{n}$, tal que S'_c veta f. Por convexidad de las preferencias, se deduce que existe $(y'_i)_{i=1}^n$, tal que $y'_i \succ_i x_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\sum_{i=1}^n \mu(S'_c \cap I_i) y'_i = \sum_{i=1}^n \mu(S'_c \cap I_i)\omega_i$. Luego I_n f-veta x vía y'.

Este resultado permite concluir que para conseguir las asignaciones pertenecientes al núcleo fuzzy de una economía discreta $\mathcal{E}_n$ es suficiente el f-veto de la coalición formada por todos los agentes. Como consecuencia de ello y del corolario 6.1 se obtiene que lo mismo sucede para conseguir los Equilibrios de Edgeworth en el caso finito-dimensional.

Corolario 6.2 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía en las condiciones del teorema 6.3. Entonces $E(\mathcal{E}_n)$=$\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$, cualquiera que sea $\mathcal{S}$, tal que $I_n \in \mathcal{S}$.*

7 Una Interpretación continua de la noción de $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy: $\mathcal{S}_c$–Núcleo de una economía sin átomos y equivalencia Core-Walras

Consideremos de nuevo la economía continua $\mathcal{E}_c$ de n tipos y la economia finita asociada $\mathcal{E}_n$. Dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$, definimos el siguiente conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_c$ en $\mathcal{E}_c$

$$\mathcal{S}_c = \{S_c \subset [0,1] \mid \text{existe } S_n \in \mathcal{S}_n, \text{ tal que } \mu(S_c \cap I_i) > 0 \Leftrightarrow i \in S_n\}$$

Recíprocamente, dado un conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_c$ en $\mathcal{E}_n$, definimos el siguiente conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$

$$\mathcal{S}_n = \{S_n \subset \{1, \ldots, n\} \mid \text{existe } S_c \in \mathcal{S}_c, \text{ tal que } i \in S_n \Leftrightarrow \mu(S_c \cap I_i) > 0\}$$

A continuación establecemos la equivalencia entre el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy de $\mathcal{E}_n$ y el $\mathcal{S}_c$-Núcleo de $\mathcal{E}_c$, tanto para el caso finito como infinito-dimensional.

Teorema 7.1 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con n agentes, definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$ (resp. sobre el reticulo de Banach E). Supongamos que las preferencias son convexas (resp. convexas y continuas sobre E_+). Entonces, para cualquier conjunto de coaliciones $\mathcal{S}_n$ en $\mathcal{E}_n$ se verifica lo siguiente.*

Si la asignación $f \in \mathcal{S}_c$-$N(\mathcal{E}_c)$, entonces $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n$-$NF(\mathcal{E}_n)$, siendo $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$.

Recíprocamente, si la asignación $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n$-$NF(\mathcal{E}_n)$, entonces $f \in \mathcal{S}_c$-$N(\mathcal{E}_c)$, siendo $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$.

Demostración. Supongamos x, definida por $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$, está f-vetada por la coalición $S_n \in \mathcal{S}_n$ vía $(y_i)_{i \in S_n}$, entonces existen α_i, con $0 < \alpha_i \leq \frac{1}{n}$, tales que $\sum_{i \in S_n} \alpha_i y_i = \sum_{i \in S_n} \alpha_i \omega_i$ y además $y_i \succ_i x_i$, para todo $i \in S_n$. Por el teorema de convexidad en Hüsseinov (1987) (resp. por el lema en García-Cutrín y Hervés (1993)), para cada $i \in S_n$ existe $T_i \subset I_i$, con $\mu(T_i) > 0$, tal que $y_i \succ f(t)$, para todo $t \in T_i \subset I_i$. Sea $\beta = \min_{i \in S_n}\{\mu(T_i)\}$. Para cada $i \in S_n$ sea $S_i \subset T_i$, con $\mu(S_i) = \beta \alpha_i$. Consideremos $S_c = \bigcup_{i \in S_n} S_i$ y definamos $y(t) = y_i$, si $t \in S_i$. Se obtiene que $\int_{S_c} y d\mu = \sum_{i \in S_n} \beta \alpha_i y_i = \sum_{i \in S_n} \beta \alpha_i \omega_i = \int_{S_c} \omega d\mu$ y además $y_i \succ_i f(t)$, para todo $t \in S_i$, para todo $i \in S_n$. Luego, la coalición $S_c \in \mathcal{S}_c$ y S_c veta f vía y.

Recíprocamente, supongamos que f, definida por $f(t) = x_i$,, si $t \in I_i$, está vetada por $S_c \in \mathcal{S}_c$. Sea $S_n = \{i \in \{1, \ldots, n\} | \mu(S_c \cap I_i > 0\}$. Por convexidad de las preferencias (resp. por convexidad y continuidad), se tiene que existen $y_i \in \mathbb{R}^\ell_+$ (resp. $y_i \in E_+$), para cada $i \in S_n$, tales que $\sum_{i \in S_n} \mu(S_n \cap I_n) y_i = \sum_{i \in S_n} \mu(S_n \cap I_n) \omega_i$ y además $y_i \succ_t f(t)$, para todo $t \in S_c \cap I_i$. Por tanto, x está f-vetada por S_n.

Observaciones. En Hüsseinov (1994) se prueba que para economías definidas sobre un espacio de mercancías de dimensión finita y suponiendo convexidad de las preferencias se verifica que $x \in NF(\mathcal{E}_n)$ y sólo si $f \in N(\mathcal{E}_c)$, con $f(t) = x_i$, si $t \in I_i$. Suponiendo además continuidad y monotonía de las preferencias, se prueba en el mismo artículo que si la asignación $f \in N(\mathcal{E}_c)$, entonces $x = (x_1, \ldots, x_n) \in NF(\mathcal{E}_n)$, siendo $x_i = \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f d\mu$. Nótese que ambos resultados son casos particulares del teorema anterior. Más aún, en el caso de dimensión finita, sólo suponemos aquí convexidad de las preferencias.

Aubin (1979) prueba que toda asignación del núcleo fuzzy es una asignación walrasiana. A continuación establecemos un resultado de este tipo. Para ello, denotemos por $W(\mathcal{E})$ el conjunto de asignaciones de equilibrio walrasiano de la economía $\mathcal{E}$.

Teorema 7.2 *Sea $\mathcal{E}_n$ una economía con n agentes definida sobre el espacio de mercancías $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$. Supongamos que las preferencias de los agentes son continuas, convexas y monótonas y que el vector de recursos totales $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ es estrictamente positivo. Sea $\mathcal{S}$ cualquier conjunto de coaliciones que contenga a la coalición formada por todos los agentes I_n. Entonces $\mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n) = W(\mathcal{E}_n)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta la equivalencia Core-Walras establecida en Aumann (1964) para economías con un continuo de agentes, por el teorema 7.1 se obtiene que $W(\mathcal{E}_n) \subset NF(\mathcal{E}_n)$. Luego, por el teorema 6.3, si $I_n \in \mathcal{S}$, entonces $W(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$. Recíprocamente, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$-$NF(\mathcal{E}_n)$, con $I_n \in \mathcal{S}$. entonces, por el teorema 6.3 $x \in NF(\mathcal{E}_n)$. Sea f la asignación en $\mathcal{E}_c$ definida por $F(t) = x_i$, si $t \in I_i$. Aplicando el teorema 7.1 se tiene que $f \in N(\mathcal{E}_c)$. Por Aumann (1964), existe un sistema de precios $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ tal que $(f.p)$ es un equilibrio competitivo en la economía continua $\mathcal{E}_c$. Por tanto, (x, p) es equilibrio competitivo en $\mathcal{E}_n$.

Nótese que, en particular, este resultado, permite concluir que bajo las hipótesis establecidas se verifica que $NF(\mathcal{E}_n) = W(\mathcal{E}_n)$, equivalencia que se obtiene en Hüsseinov (1994). Aquí hemos probado que para conseguir las asignaciones de equilibrio competitivo de la economía $\mathcal{E}_n$ es suficiente considerar el f-veto de la coalición formada por los n agentes que hay en $\mathcal{E}_n$. Para ello, hemos utilizado el resultado de equivalencia de Aumann entre las asignaciones del núcleo y las asignaciones walrasianas de una economía definida sobre un espacio de mercancías de dimensión finita y con un un continuo de agentes. En García-Cutrín y Hervés (1993). se prueba la equivalencia Core-Walras para economías continuas de n tipos definidas sobre un retículo de Banach. Este resultado de equivalencia, junto con el teorema 7.1, nos permiten establecer hipótesis que garantizan el que las asignaciones walrasianas de una economía $\mathcal{E}$, definida sobre un espacio de mercancías de dimensión infinita, sean aquellas que no están f-vetadas.

Teorema 7.3 *Sea $\mathcal{E}$ una economía con n agentes, definida sobre el espacio de mercancías E, siendo E un retículo de Banach. Supongamos que las preferencias sobre E_+ son convexas, estrictamente monótonas, continuas y uniformemente τ-propias, con respecto a alguna topología τ sobre E menos fina que la topología de la norma. Supongamos además que el total de los recursos iniciales $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)\omega_i$ es estrictamente positivo y que el intervalo ordenado $[0, \omega]$ es τ-compacto. Entonces se verifica que $NF(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.*

Demostración. La prueba es como la del teorema 7.2, utilizando la equivalencia Core-Walras obtenida en García-Cutrín y Hervés (1993), en vez de la equivalencia Core-Walras en Aumann (1964).

8 Conclusiones

La definición clásica de núcleo de una economía lleva implícito el hecho de que pueda formarse cualquier coalición de agentes. Sin embargo, si se piensa, por ejemplo, en costes de información y comunicación o en incompatibilidad de agentes en la formación de coaliciones, es posible que algunas coaliciones no puedan ser consideradas. Siguiendo esta idea se han introducido los conceptos de $\mathcal{S}$-Núcleo y $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, generalizando las nociones clásicas.

La definición de $\mathcal{S}$-Núcleo de una economía se ha establecido en un marco general, en el sentido de que pueden considerarse economías finitas, contínuas e incluso mixtas. Por otra parte, es de señalar que la existencia de $\mathcal{S}$-Núcleo está garantizada si el núcleo es no vacio. Se interpretado resultados conocidos como equivalencias entre núcleo y determinados $\mathcal{S}$-Núcleos de una economía sin átomos. Por ejemplo, en economías con un continuo de agentes y definidas sobre un espacio de mercancias de dimensión finita una asignación que no está vetada por una coalición arbitrariamente pequeña está en el núcleo. Cabe plantearse si el mismo resultado es cierto en economías con un espacio de mercancías de dimensión infinita, donde la prueba de Schmeidler no sirve, pues el teorema de Liapunov no es cierto en dimensión infinita.

La misma idea de restringir el conjunto de coaliciones permitidas ha conducido al concepto de $\mathcal{S}$-Equilibrio de Edgeworth, obteniendo una caracterización mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy o equivalentemente mediante el $\mathcal{S}$-Núcleo fuzzy en $\mathbb{Q}$.

El hecho de interpretar una economía continua de n tipos como una economía con un número finito de agentes, conduce a establecer equivalencias interesantes entre los conceptos introducidos, tanto en el caso de un espacio de mercancías de dimensión finita como en el caso infinito-dimensional, generalizando resultados clásicos y también resultados recientemente publicados.

Por otra parte, Florenzano (1990) prueba la existencia de equilibrio walrasiano, núcleo fuzzy y equilibrio de Edgeworth en una economía con producción y con preferencias no ordenadas, y obtiene algunos resultados de equivalencia. En este trabajo, sólo hemos considerado preferencias ordenadas. Puede ser objeto de estudios posteriores el caso de economías con externalidades.

Por último señalar que esta nota puede servir para introducir otros $\mathcal{S}$-conceptos que generalicen nociones donde intervenga la formación de coaliciones, como puede ser la noción de equilibrio de Nash fuerte o la noción de α-núcleo, introducidas por Aumann (1959, 1964), analizando qué puede deducirse de dicha generalización.

Referencias

[1] ALIPRANTIS, C.D., BROWN, D., BURKINSHAW, O. (1989): "Existence and Optimality of Competitive Equilibria." Springer-Verlarg.

[2] AUMAN, R.J. (1964): "Markets with a Continum of Traders." *Econometrica*, 52, 39-50.

[3] AUBIN, J.P. (1979): "Mathematical Methods of Game Economic Theory." North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford.

[4] DEBREU, G., SCARF, H. (1963): "A Limit theorem on the Core of an Economy." *International Economic Review*, 4, 235-246.

[5] DIESTEL S., UHL J. (1977): "Vector Measures." Mathematical Surveys, 15.

[6] FLORENZANO, M. (1990): "Edgeworth Equilibria, Fuzzy Core, and Equilibria of a Production Economy without ordered Preferences." *Journal of Mathematical Analisis and Aplications*, 153, 18-36.

[7] GABSZEWICZ, J.J., SHITOVITZ, B. : "Core in perfectly competitive economies." CORE Discussion Paper 8808.

[8] GARCÍA-CUTRÍN, J., HERVÉS, C. (1993): "A Discrete Approach to Continuum Economies." *Economic Theory*, 3, 577-584.

[9] GRODAL, B. (1972): "A Second Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econométrica*, 40, 581-583.

[10] HANSEN, T. (1969): "A note on the limit of the core of an Exchange Economy." *International Economic Review*, 10, 479-483.

[11] HÜSSEINOV, F. (1994): "Interpretation of Aubin's fuzzy coalitions and their extension." *Journal of Mathematical Economics*, 23, 459-516.

[12] KHAN, M.A., YANNELIS, N.C. (1991): "Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces." Springer-Verlag.

[13] OSTROY, J.M., ZAME, W.R. (1994): "Nonatomic economies and the boundaries of perfect competition." *Econometrica*, 62, 593-633.

[14] ROCKAFELLAR, T. (1970): "Convex Analysis." Princeton.

[15] RUSTICHINI A.,YANNELIS N.C. (1991): "Edgeworth's Conjecture in Economies with a Continuum of Agents and Commodities." *Journal of Mathematical Economics*, 20, 307-326.

[16] SCHMEIDLER, D. (1972): "A Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econométrica*, 40, 579-580.

[17] VIND, K. (1964): "Edgeworth-Allocations in an Exchange Economy with Many Traders." *International Economic Review*, 5. 165-167.

[18] VIND, K. (1972): "A Third Remark on the Core of an Atomless Economy." *Econometrica*, 40, 585-586.

WORKING PAPERS 1996

Economics Series

96-01 (01) Praveen Kujal and Roland Michelitsch
"Market power, inelastic elasticity of demand, and terms of trade"

96-02(02) Emmanuel Petrakis and Minas Vlassis
"Endogenous wage-bargaining institutions in oligopolistic industries"

96-03(03) Coral del Río and Javier Ruiz-Castillo
"Intermediate inequality and welfare. The case of Spain, 1980-81 to 1990-91"

DOCUMENTOS DE TRABAJO 1996

Serie de Economía

96-01(01) Emma Moreno y Carlos Hervés
"Algunas consideraciones sobre el mecanismo del veto"